

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده: آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمون‌هایی که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود: **الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند؛ آزمون‌های شماره ۵، ۶، ۷ و ۸ به ترتیب امتحان نهایی خرداد، شهریور و دی ۹۸ و دی ۹۹ هستند. این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده: آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. آزمون‌های شماره ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ به ترتیب امتحان نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، خرداد و شهریور ۹۹ هستند.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همه آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت، برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (🙄) در این قسمت، همه آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار (۳) نیاز دارید، در ۱۴ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!
یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

صفحه	صفحه	نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
۲۴	۳	اول	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۱
۲۵	۵	اول	(طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۲
۲۶	۷	اول	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۳
۲۸	۹	اول	(طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۴
۲۹	۱۱	دوم	(طبقه‌بندی شده) ۹۸ نهایی خرداد	آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۹۸
۳۰	۱۲	دوم	(طبقه‌بندی شده) ۹۸ نهایی شهریور	آزمون شماره ۶ نهایی شهریور ۹۸
۳۰	۱۳	دوم	(طبقه‌بندی شده) ۹۸ نهایی دی	آزمون شماره ۷ نهایی دی ۹۸
۳۱	۱۴	دوم	(طبقه‌بندی شده) ۹۹ نهایی دی	آزمون شماره ۸ نهایی دی ۹۹
۳۲	۱۶	دوم	(طبقه‌بندی نشده) ۱۴۰۰ نهایی خرداد	آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۰
۳۳	۱۸	دوم	(طبقه‌بندی نشده) ۱۴۰۰ نهایی شهریور	آزمون شماره ۱۰ نهایی شهریور ۱۴۰۰
۳۴	۲۰	دوم	(طبقه‌بندی نشده) ۹۹ نهایی خرداد	آزمون شماره ۱۱ نهایی خرداد ۹۹
۳۵	۲۲	دوم	(طبقه‌بندی نشده) ۹۹ نهایی شهریور	آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۹۹

بازم‌بندی درس ریاضی و آمار ۳

فصل	نوبت اول	نوبت دوم (خرداد)	شهریور و دی
۱	۱۵	۵	۸
۲	۵	۵/۵	۵/۵
	—	—	
۳	—	۹/۵	۶/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)	
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف	
فصل اول					
۲		<p>۱ الف) مطابق شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم و برگردیم به طوری که در مسیر برگشت، از مسیر رفته شده استفاده نکنیم؟ (تمام جاده‌ها دوطرفه هستند.) ب) جای خالی را پر کنید. اگر در بین داده‌ها، داده دورافتاده داشته باشیم بهتر است از شاخص مرکزی استفاده کنیم.</p>			۱
۱	<p>الف) $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!}$</p>	<p>ب) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$</p>	<p>۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:</p>		
۰/۷۵	<p>۳ مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟</p>				
۱/۵	<p>در ساختن اعداد به شرایط و محدودیت‌های سوال توجه کنید. آنگاه مسئله شرط خاصی نداشتن پرکردن خانه‌ها، رواجی به راست انجام بدین.</p>	<p>۴ با ارقام ۰, ۱, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸ و بدون تکرار ارقام: الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟ ب) چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟ پ) چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت که یکان آن ۷ و صدگان آن صفر است؟</p>			
۱	<p>۵ با حروف کلمه «وساطت» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ ب) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ط» ختم شود؟</p>				
۱	<p>در حل مسائل پیشامدها می‌توانید از تمام قوانین مهمه‌ها که در سال‌های قبل فوندرین، استفاده کنید.</p>		<p>۶ در هر قسمت، پیشامد مطلوب را رنگ کنید: الف) A رخ دهد ولی B یا C رخ ندهند. (نه B رخ دهد نه C) ب) A، B و C رخ دهند.</p>		
۱/۵	<p>۷ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شد آن‌گاه تاسی را می‌ریزیم در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم: الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. ب) پیشامد A را که در آن، عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید با اعضا مشخص کنید.</p>				
۲	<p>در حل مسائل احتمال، اولین قدم محاسبه $n(S)$ است و باید دقت کنید که در محاسبه $n(S)$ هیچ محدودیتی رو برای انتخاب افراد یا اشیاء در نظر نمی‌گیریم.</p>	<p>۸ از جعبه‌ای که شامل ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال این‌که: الف) هر ۳ سیب سالم باشند. ب) ۲ سیب خراب باشند. پ) تعداد سیب‌های سالم یکی بیشتر از لکه‌دارها باشد.</p>			
۳	<p>۹ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمالات زیر را حساب کنید: الف) اعداد ظاهر شده، یکسان باشند. (پیشامد A) ب) مجموع اعداد ظاهر شده، ۴ باشد. (پیشامد B) پ) حاصل ضرب اعداد ظاهر شده، کم‌تر از ۳۷ باشد. (پیشامد C)</p>				
۱/۲۵	<p>۱۰ گام‌های مختلف چرخه آمار در حل مسائل را فقط نام ببرید.</p>				

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)
نمره	نوبت اول پایه دوازدهم			ردیف
آزمون شماره ۱				
فصل دوم				
۱	<p>جاهای خالی را پر کنید.</p> <p>الف) یک دنباله، نوعی تابع است که دامنه آن است.</p> <p>ب) رابطه بازگشتی دنباله $1, -1, 2, -4, 8, \dots$ برابر با است.</p>			۱۱
۱/۲۵	<p>اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آن‌ها را مشخص کنید.</p> <p>الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین</p> <p>ب) میزان ساعات مطالعه دانش‌آموزان یک کلاس براساس شماره هر دانش‌آموز در لیست کلاس</p> <p>پ) حجم مکعبی به ضلع x سانتی‌متر</p> <p>ت) تغییرات سطح آب یک دریاچه در ۱۰ سال اخیر</p> <p>ث) میزان مصرف ماهانه برق آپارتمان‌های با شماره ۱ تا ۱۰۰ یک مجتمع</p> <p>زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/></p> <p>زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/></p>			۱۲
۱/۵	<p>الف) برای دنباله $2, 7, 12, 17, \dots$ هم ضابطه تابعی و هم رابطه بازگشتی بنویسید.</p> <p>ب) برای دنباله $16, 3, 16, 3, 16, \dots$ یک رابطه دوضابطه‌ای بنویسید.</p>			۱۳
۱/۲۵	<p>اگر $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$، $b_n = 4 + (-1)^n$ و $c_n = 4$ باشند، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.</p> <p>$a_1 + b_8 - c_7 = ?$</p>			۱۴
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید

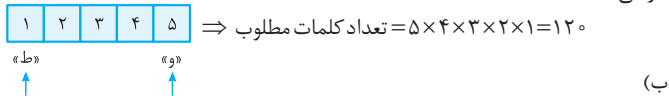
شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)												
نمره	نوبت دوم پایه دوازدهم - خرداد ۱۴۰۰			آزمون شماره ۹												
ردیف																
۱/۵	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.</p> <p>(الف) برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت = !۰ تعریف می کنیم.</p> <p>(ب) اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به طریق انجام پذیر است.</p> <p>(پ) تعداد جایگشت های n تایی از n شیء برابر با است.</p> <p>(ت) اگر داده های دورافتاده داشته باشیم از نمودار استفاده می کنیم.</p> <p>(ث) اگر پیشامد A حتمی باشد، احتمال آن برابر با است.</p> <p>(ج) هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، به طوری که در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می گوئیم.</p>															
۱	<p>۲ درستی یا نادرستی جمله های زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) وقتی داده دورافتاده داریم، میانه معیار مناسبی برای توصیف داده ها می باشد.</p> <p>(ب) برای توصیف داده های کمی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد برابر باشد.</p> <p>(پ) مرتب کردن داده ها در گام دوم چرخه آمار اتفاق می افتد.</p> <p>(ت) طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم ترین گام رسیدن به پاسخ است که در مرحله بیان مسئله صورت می گیرد.</p>															
۱	<p>۳ گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>(الف) حاصل $\frac{6!}{3!}$ کدام است؟</p> <p>(ب) روش نمونه گیری مربوط به کدام مرحله چرخه آمار است؟</p> <p>(۱) طرح و برنامه ریزی (۲) بیان مسئله</p> <p>(پ) با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می توان تشکیل داد؟</p> <p>(ت) حاصل عبارت $p(2,2)$ کدام است؟</p> <table border="1"> <tr> <td>۲۰ (۱)</td> <td>۳۰ (۲)</td> <td>۱۲۰ (۳)</td> <td>۳۵ (۴)</td> </tr> <tr> <td>۴۲ (۱)</td> <td>۱۵ (۲)</td> <td>۲۰ (۳)</td> <td>۵۶ (۴)</td> </tr> <tr> <td>۱ (۱)</td> <td>۲ (۲)</td> <td>۲ (۳)</td> <td>۴ (۴)</td> </tr> </table>				۲۰ (۱)	۳۰ (۲)	۱۲۰ (۳)	۳۵ (۴)	۴۲ (۱)	۱۵ (۲)	۲۰ (۳)	۵۶ (۴)	۱ (۱)	۲ (۲)	۲ (۳)	۴ (۴)
۲۰ (۱)	۳۰ (۲)	۱۲۰ (۳)	۳۵ (۴)													
۴۲ (۱)	۱۵ (۲)	۲۰ (۳)	۵۶ (۴)													
۱ (۱)	۲ (۲)	۲ (۳)	۴ (۴)													
۰/۷۵	<p>۴ بین چهار شهر A, B, C, D مطابق شکل مقابل راه هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟</p> 															
۰/۷۵	<p>۵ از بین ۲ دانش آموز رشته ریاضی و ۳ دانش آموز رشته تجربی و ۲ دانش آموز رشته انسانی، ۳ دانش آموز را به تصادف برای اردوی مشهد انتخاب می کنیم. چه قدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش آموز انتخاب شود؟</p>															
۱/۵	<p>۶ جدول زیر را کامل کنید.</p> <table border="1"> <tr> <td>ضابطه دنباله</td> <td>فرمول بازگشتی</td> <td>۴ جمله اول دنباله</td> </tr> <tr> <td>$a_n = 2n + 1$</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>				ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	۴ جمله اول دنباله	$a_n = 2n + 1$								
ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	۴ جمله اول دنباله														
$a_n = 2n + 1$																
۱	<p>۷ با توجه به دنباله های $a_n = 2^{2n+1}$، $b_n = \frac{15}{n+1}$ و $c_n = (\frac{1}{p})^{n-2}$ حاصل عبارت $a_1 - b_4 + c_7$ را به دست آورید.</p>															
۱	<p>۸ در یک دنباله حسابی جمله اول ۱۷- و جمله دهم برابر ۱۰ است. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.</p>															
۱	<p>۹ در دنباله حسابی مقابل، مجموع ۱۶ جمله اول را به دست آورید.</p> <p>۱۱، ۸، ۵، ...</p>															
۱	<p>۱۰ کدام یک از جملات عمومی زیر مربوط به دنباله حسابی است؟ اختلاف مشترک آن را به دست آورید.</p> <p>(الف) $a_n = n(n-1)$ (ب) $b_n = 3(n-2)$</p>															
۱/۵	<p>۱۱ به کمک رابطه بازگشتی $a_1 = \frac{1}{p}$ و $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$:</p> <p>(الف) سه جمله اول دنباله را بنویسید.</p> <p>(ب) جمله عمومی و نسبت مشترک آن را به دست آورید.</p>															
۱/۵	<p>۱۲ نخستین جمله یک دنباله هندسی ۹۶ و نسبت مشترک این دنباله ۲ می باشد، کدام جمله دنباله برابر ۷۶۸ است؟</p>															

شماره	ریاضی و آمار (۳)	رشته: ادبیات و علوم انسانی	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	kheilisabz.com	شماره
نمره	نوبت دوم پایه دوازدهم - خرداد ۱۴۰۰			آزمون شماره ۹	
۲	عبارت توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.	الف) $4^{\frac{1}{3}}$	ب) $(\frac{0}{8})^{\frac{2}{3}}$	پ) $\sqrt[4]{(21)^4}$	ت) $\sqrt[4]{(0/47)^3}$
۱/۵	در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x را مشخص کنید.	الف) $8^x \times 9^x = 72^x$	ب) $(5^x)^6 = \frac{1}{5^2}$	پ) $(\frac{0}{6}) \times (\frac{0}{6})^x \times (\frac{0}{6})^3 = (\frac{0}{6})^4$	
۱	حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.	الف) $(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}})^4$	ب) $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{-1}{3}}$		
۱	نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = 3^x$ را رسم کنید.				
۱	پدر سارا قصد دارد مبلغ ۲۰ میلیون تومان را برای هزینه دانشگاه دخترش در بانکی سپرده‌گذاری کند. این بانک سالانه ۲۰٪ سود به سپرده‌ها پرداخت می‌کند. پدر سارا بعد از ۲ سال چه مبلغی را می‌تواند دریافت کند؟				
۲۰	جمع نمرات	موفق باشید			

پاسخنامه تشریحی

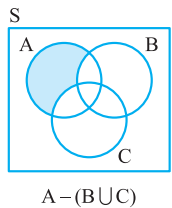
آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

۵- الف) بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم چون کلمه «وساطت» به زبان فارسی است:

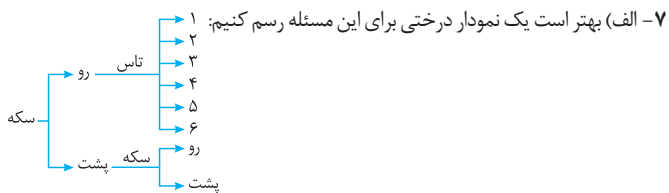
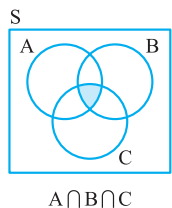


ب)
$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{تعداد کلمات مطلوب} = 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

۶- الف) فقط باید A رخ دهد یعنی باید قسمتی از A را رنگ کنیم که با B یا C اشتراک نداشته باشد:



ب) می‌خواهیم هر ۳ پیشامد با هم رخ دهند. لذا قسمت مشترک A، B و C را رنگ می‌کنیم:



الف) ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \times 3!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 3 \times 2 \times 1} = 364$$

ب) پیشامد مطلوب

$$A = \{(r, 2), (r, 4), (r, 6), (r, p), (r, p), (p, p), (p, p)\}$$

حداقل یکی از تاس‌ها پشت بیاید عدد تاس زوج باشد

الف)
$$n(A) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

۸- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \times 3!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 3 \times 2 \times 1} = 364$$

الف)
$$n(A) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{364}$$

ب) وقتی ۲ سیب خراب است پس سیب سوم سالم است؛ لذا داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{10}{1} = 6 \times 10 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{364}$$

ب) باید ۲ سیب سالم و ۱ سیب خراب انتخاب شود:

$$n(A) = \binom{10}{2} \times \binom{4}{1} = 45 \times 4 = 180 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{180}{364}$$

۱- الف) مسیر رفت

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C: \text{تعداد حالت‌ها} = 2 \times 4 = 8 \\ \text{یا} \\ A \rightarrow D \rightarrow C: \text{تعداد حالت‌ها} = 4 \times 2 = 12 \end{cases}$$

تعداد کل حالت‌های مسیر رفت $= 8 + 12 = 20$

مسیر برگشت

$$\begin{cases} C \rightarrow B \rightarrow A: \text{تعداد حالت‌ها} = 3 \times 1 = 3 \\ \text{یا} \\ C \rightarrow D \rightarrow A: \text{تعداد حالت‌ها} = 2 \times 3 = 6 \end{cases}$$

تعداد کل حالت‌های مسیر برگشت $= 3 + 6 = 9$

تعداد کل حالت‌های رفت و برگشت $= 20 \times 9 = 180$

ب) میانه

۲- الف)
$$\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!} = \frac{8 \times \cancel{7} \times \cancel{6!}}{2 \times 1 \times \cancel{7} \times \cancel{6!}} = \frac{8}{2} = 4$$

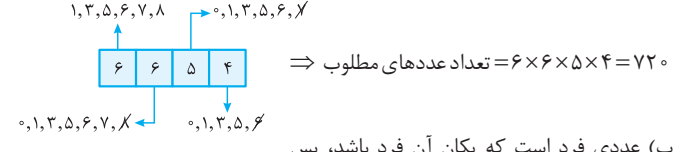
ب) $(n+3)$ بزرگ‌تر از $(n+1)$ است، پس آن را باز می‌کنیم تا به $(n+1)$ برسیم:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2)$$

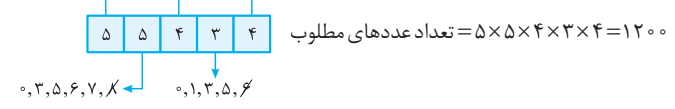
۳- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$ مجموعه A دارای ۶ عضو است، پس خواهیم نوشت:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6!}{(3! \times 3!)} = \frac{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times 3!}{3 \times 2 \times 1 \times 3!} = 20$$

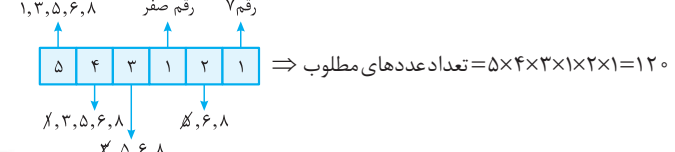
۴- الف) شرط خاص نداریم پس پُر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:



ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس ابتدا خانه مربوط به یکان را پُر می‌کنیم و سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می‌رویم:



پ) یکان فقط باید ۷ باشد پس برای آن فقط یک انتخاب وجود دارد. در مورد صدگان نیز فقط یک انتخاب (رقم صفر) داریم، پس ابتدا این دو خانه را پُر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می‌رویم و پُر کردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم:



۹- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم: $n(S) = 6^2 = 36$

(الف) می‌خواهیم دو عدد ظاهر شده، یکسان باشند پس پیشامد مطلوب، به صورت زیر است:

$$A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \text{تاس اول} & & \text{تاس اول} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{تاس دوم} & & \text{تاس دوم} \end{array}$

(ب) باید اعدادی از دو تاس را انتخاب کنیم که جمعشان ۴ شود:

$$B = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(پ) تاس‌ها هر عددی که ظاهر شوند ضربشان کمتر از ۳۷ است پس C یک پیشامد حتمی (قطعی) است و احتمال وقوع آن ۱ است. (نیاز به هیچ محاسبه‌ای نیست).

۱۰- گام اول: بیان مسئله (فهم مسئله، تعریف دقیق مسئله)

گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی (روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری، روش انجام کار)

گام سوم: گردآوری، سامان‌دهی و پاک‌سازی داده‌ها

گام چهارم: تحلیل داده‌ها (مرتب‌کردن داده‌ها، استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی، استفاده از نمودارها و جدول‌ها)

گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری و تفسیر نتایج (نتیجه‌گیری، نقد و بررسی، ایده‌های جدید)

۱۱- الف) مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N})

$$a_{n+1} = \frac{-1}{2} a_n, a_1 = 8 \quad (\text{ب})$$

۱۲- هر قسمت را به شکل (هم‌دامنه \rightarrow دامنه) می‌نویسیم سپس دامنه را بررسی می‌کنیم:

کاهش دما \rightarrow ارتفاع از سطح زمین (الف)

زیرمجموعه \mathbb{R} : دامنه

میزان ساعات مطالعه \rightarrow شماره هر دانش‌آموز در کلاس (ب)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

حجم مکعب \rightarrow اندازه ضلع مکعب (پ)

زیرمجموعه \mathbb{R} : دامنه

تغییرات سطح آب \rightarrow شماره سال‌های اخیر (۱۰ سال اخیر) (ت)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

میزان مصرف برق \rightarrow شماره آپارتمان‌ها (۱ تا ۱۰۰) (ث)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

۱۳- الف) جملات دنباله ۵ تا ۵ تا زیاد می‌شوند، لذا خواهیم داشت:

$$a_n = 5n - 3 \quad (\text{جمله عمومی})$$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 5 \quad (\text{رابطه بازگشتی})$$

(ب) جملات دنباله، به صورت یک‌درمیان ۱۶ و ۳ هستند لذا چنین می‌نویسیم:

$$a_n = \begin{cases} 16 & \text{فرد } n \\ 3 & \text{زوج } n \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1^2}{(-1)^1} = \frac{1}{-1} = -1, \quad b_8 = 4, \quad c_7 = 4 + (-1)^7 = 4 + (-1) = 3 \quad -14$$

$$\Rightarrow a_1 + b_8 - c_7 = (-1) + 4 - 3 = 0$$

$$n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = 35 \quad -5$$

انسانی تجربی ریاضی

$$n(A) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 2 \times 3 \times 2 = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{35}$$

$$a_n = 2n + 1 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = 2(1) + 1 = 3 \\ n=2 \rightarrow a_2 = 2(2) + 1 = 5 \\ n=3 \rightarrow a_3 = 2(3) + 1 = 7 \\ n=4 \rightarrow a_4 = 2(4) + 1 = 9 \end{cases} \quad -6$$

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$$

رابطه بازگشتی دنباله حسابی $\rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$
پس جدول به صورت زیر پُر خواهد شد:

ضابطه دنباله	فرمول بازگشتی	جمله اول دنباله
$a_n = 2n + 1$	$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$	3, 5, 7, 9

$$a_n = 2^{2n+1} \xrightarrow{n=1} a_1 = 2^{2(1)+1} = 2^3 = 8 \quad -7$$

$$b_n = \frac{15}{n+1} \xrightarrow{n=4} b_4 = \frac{15}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$$

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \xrightarrow{n=2} c_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\Rightarrow a_1 - b_4 + c_2 = 8 - 3 + 1 = 6$$

$$a_{10} = 10 \Rightarrow a + 9d = 10 \xrightarrow{a=-17} -17 + 9d = 10 \quad -8$$

$$\Rightarrow 9d = 27 \Rightarrow d = \frac{27}{9} = 3$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_n = -17 + (n-1) \times 3 \\ = -17 + 3n - 3 = 3n - 20$$

$$11, 8, 5, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی است}} d = 8 - 11 = -3 \quad -9$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\xrightarrow{\substack{a=11, d=-3 \\ n=16}} S_{16} = \frac{16}{2} [2(11) + 15(-3)] = 8 \times (-23) = -184$$

۱۰- رابطه $a_n = n(n-1)$ جمله عمومی دنباله حسابی نیست، زیرا:

$$a_n = n(n-1) = n^2 - n$$

ولی می‌دانیم در جمله عمومی دنباله حسابی، توان n فقط باید ۱ باشد. پس رابطه $b_n = 3(n-2) = 3n - 6$ بیان‌گر جمله عمومی یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک $d = 3$ است. (ضریب n همان اختلاف مشترک است.)

$$a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow a_2 = \frac{2}{3} a_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ n=2 \rightarrow a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \end{cases} \quad (الف-11) \\ (a_1 = \frac{1}{3})$$

$$\xrightarrow{\text{سه جمله اول}} \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{27}, \dots$$

(ب) نسبت مشترک برابر $\frac{2}{3}$ است و جمله عمومی برابر است با:

$$a_n = ar^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 96, r = 2, a_n = 768, n = ? \quad -12$$

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 768 = 96 \times 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = \frac{768}{96}$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = 8 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^3 \Rightarrow n-1 = 3 \Rightarrow n = 4$$

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) ۱ ب) $m \times n$ پ) $n!$

ت) جعبه‌ای ج) $A \cap B = \emptyset$ ث) ۱

۲- الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120 \quad \text{۳- الف) گزینه «۳»؛ زیرا:}$$

ب) گزینه «۱»

پ) گزینه «۴»؛ زیرا:

$$\text{ها تعداد مثلث} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3!} = 56$$

$$p(2, 2) = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \quad \text{ت) گزینه «۳»}$$

۴- نباید از شهر B عبور کنیم پس باید ابتدا از شهر C به شهر A و سپس از شهر A به شهر D برویم، ضمناً چون این دو عمل، پشت سر هم انجام می‌شود باید از اصل ضرب استفاده کنیم:

$$CAD = 3 \times 4 = 12$$

$$\text{الف) } 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4^1} \qquad \text{ب) } (0/8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0/8^2} \qquad -13$$

$$\text{پ) } \sqrt[5]{21^4} = 21^{\frac{4}{5}} \qquad \text{ت) } \sqrt[4]{(0/47)^3} = (0/47)^{\frac{3}{4}}$$

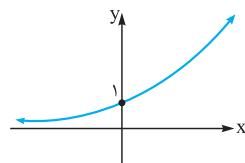
$$\text{الف) } 8^f \times 9^x = 72^f \Rightarrow 9^x = \frac{72^f}{8^f} \Rightarrow 9^x = 9^f \Rightarrow x = f \qquad -14$$

$$\text{ب) } (5^x)^6 = \frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{6x} = 5^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{پ) } (0/6)^1 \times (0/6)^x \times (0/6)^3 = (0/6)^8 \\ \Rightarrow (0/6)^{1+x+3} = (0/6)^8 \Rightarrow x+4=8 \Rightarrow x=4$$

$$\text{الف) } \left(\frac{1}{a^2}\right)^4 = \frac{a^{\frac{1}{2} \times 4}}{a^{\frac{1}{2} \times 4}} = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1 \qquad -15$$

$$\text{ب) } 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = 5^0 = 1$$



۱۶- عدد پایه در $y = 3^x$ یعنی ۳ بزرگ‌تر از ۱ است، پس تابعی افزایشی یا صعودی به شکل مقابل داریم:

۱۷- با یک مسئله رشد مواجه هستیم:

$$c = 20 \text{ میلیون تومان}, r = \frac{20}{100} = 0/2, t = 2, f(2) = ?$$

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(2) = 20(1+0/2)^2 = 20 \times (1/2)^2$$

$$= 20 \times 1/4 = 28/8 \text{ میلیون تومان}$$

درس نامه توپ برای شب امتحان

فصل: آمار و احتمال

درس: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت این دو عمل را به $(m+n)$ طریق می‌توان انجام داد. حرف «یا» نشان‌دهنده این است که باید از اصل جمع استفاده کنیم. (اصل جمع برای بیشتر از ۲ عمل هم برقرار است.) مثلاً اگر علی بتواند برای رفتن به دانشگاه از ۳ خط تاکسی یا ۴ خط اتوبوس یا ۲ خط مترو استفاده کند، تعداد حالت‌های رفتن او به دانشگاه برابر است با: $3+4+2=9$

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله متوالی اول و دوم انجام شود، به طوری که مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم، هر یک از حالت‌های مرحله اول به n طریق انجام شود، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق، قابل انجام است. حرف «و» نشان می‌دهد که باید از اصل ضرب استفاده کنیم. توجه کنید که در اصل ضرب، ما دو یا چند عمل را به طور متوالی انجام می‌دهیم. یعنی همه کارها (عمل‌ها) با هم انجام می‌شوند.

مثلاً فرض کنید امیر ۲ جفت کفش، ۳ پیراهن و ۵ شلوار دارد. تعداد حالت‌هایی که او می‌تواند از کفش‌ها و پیراهن خود استفاده کند طبق اصل ضرب برابر است با: $2 \times 3 \times 5 = 30$

مثال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۲۶ نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۱۶ نفر آن‌ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می‌گیرند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۲۶ نفر مشورت بگیرد؟
ب) او به چند طریق می‌تواند از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرطی که از هر گروه با ۱ نفر مشورت کند؟

پاسخ: الف) باید از اصل جمع استفاده کنیم. چون مدیرعامل فقط می‌تواند ۱ نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: $16+10=26$

ب) باید از اصل ضرب استفاده کنیم. چون مدیر می‌خواهد هم با گروه A و هم با گروه B مشورت کند؛ یعنی دو عمل را با هم انجام می‌دهد (به طور متوالی) لذا: $16 \times 10 = 160$

استفاده از اصل جمع و اصل ضرب به طور هم‌زمان: در بعضی از سؤالات، مخصوصاً سؤالات مربوط به سفر از یک شهر به یک شهر دیگر، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: فردی می‌خواهد از شهر A به شهر C برود. او به چند طریق (حالت) می‌تواند این کار را انجام دهد به شرطی که:

الف) محدودیت خاصی نداشته باشد.
ب) حتماً از شهر B بگذرد.

پاسخ: الف) برای رفتن از A به C دو مسیر کلی وجود دارد:

$$\begin{cases} A \rightarrow B \rightarrow C \text{ مسیر } : \text{تعداد حالت‌ها} = 3 \times 4 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow C \text{ مسیر } : \text{تعداد حالت‌ها} = 1 \times 2 = 2 \end{cases}$$

طبق اصل جمع \rightarrow تعداد کل حالت‌ها $= 12 + 2 = 14$

ب) این فرد می‌خواهد از A به C برود و حتماً از B هم عبور کند، لذا فقط یک مسیر وجود دارد. $A \rightarrow B \rightarrow C$

تعداد حالت‌های مسیر $= 3 \times 4 = 12$

نماد فاکتوریل: فاکتوریل را با نماد «!» نشان می‌دهیم؛ اگر n عدد طبیعی باشد $n!$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

یعنی برای محاسبه $n!$ عدد n را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود ضرب می‌کنیم. مثلاً: $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

ضمناً توجه کنید که $0! = 1$ و $1! = 1$ می‌باشد. هم‌چنین اگر بخواهیم کسری مانند $\frac{10!}{8!}$ را حساب کنیم لزومی ندارد $10!$ را تا ۸ تا ۱ باز کنیم، چون وقت‌گیر خواهد بود بلکه بهتر است $10!$ را تا ۸ باز کنیم، فقط حواستان باشد موقع باز کردن یک عدد هر جا متوقف شدیم، باید علامت! بگذاریم:

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید:

الف) $5! - 3! = ?$

ب) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = ?$

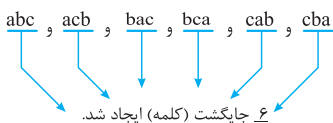
پاسخ: الف) $5! - 3! = 120 - 6 = 114$

دقت کنید که $(5! - 3!)$ با $2!$ برابر نمی‌شود.

ب) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = \frac{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1}{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1} = \frac{1}{14}$

در این سؤال، دیدیم ۸ به ۵ نزدیک‌تر است تا ۸ نسبت به ۴. پس ۸ تا ۵ باز کردیم.

جایگشت: به هر یک از حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز، یک جایگشت آن n شیء می‌گوییم و تعداد آن‌ها برابر با $n!$ می‌باشد. مثلاً با حروف a, b و c می‌توانیم کلمات زیر را بسازیم (بدون توجه به بامعنی یا بی‌معنی بودن کلمات):



البته اگر فقط تعداد جایگشت‌ها را بخواهیم، می‌گوییم چون ۳ حرف متمایز داریم، تعداد جایگشت‌ها (کلمات) برابر با $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ می‌باشد.

مثال: ۵ نفر به چند حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند؟

پاسخ: طبق درس‌نامه گفته‌شده، ۵ نفر به ۵! حالت می‌توانند در یک صف قرار گیرند و می‌دانید که: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

روش کلی ساختن اعداد و کلمات: معمولاً برای ساختن اعداد و کلمات از روش پرکردن خانه‌ها استفاده می‌کنیم. اگر بخواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه‌ها را از راست به چپ پر می‌کنیم، ولی اگر بخواهیم کلمات لاتین یا اعداد را بسازیم، خانه‌ها را از چپ به راست پر

حالت دوم: $4 \ 4 \ 3 \ 1 \Rightarrow$ تعداد عددها $= 4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$

فقط ۵: $1, 2, 6, 7$

\Rightarrow تعداد کل عددهای مطلوب $= 60 + 48 = 108$

مثال: با حروف کلمه «وصایت» و بدون تکرار حروف: (الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ی» ختم شود؟

پاسخ: (الف) چون می خواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه ها را از راست به چپ پر می کنیم:

(ب) برای خانه ها اول و آخر فقط ۱ انتخاب داریم، لذا:

فقط «و»: $1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \Rightarrow$ تعداد کلمات مطلوب $= 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

تبدیل آشیء از آشیء: اگر بخواهیم از بین n شیء مختلف، r شیء را انتخاب کنیم، به شرطی که ترتیب قرارگرفتن آنها کنار هم مهم باشد، می توانیم از فرمول تبدیل استفاده کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

البته به جای استفاده از فرمول بالا، می توانیم از همان روش پرکردن خانه ها نیز استفاده کنیم.

مثال: به چند طریق می توانیم از بین ۷ شرکت کننده در یک مسابقه به ۳ نفر اول جایزه دهیم؟

پاسخ (روش اول): در مسابقات، ترتیب انتخابها مهم است، لذا از فرمول تبدیل استفاده می کنیم:

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

روش دوم: می توانیم از روش پرکردن خانه ها استفاده کنیم:

نفر سوم: $7 \ 6 \ 5 \Rightarrow$ تعداد حالتها $= 7 \times 6 \times 5 = 210$

نفر اول: $7 \ 6 \ 5$

نفر دوم: $7 \ 6 \ 5$

ترکیب آشیء از آشیء: اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم و ترتیب انتخابها مهم نباشد از فرمول ترکیب استفاده می کنیم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

مثال: از بین ۴ مهره آبی و ۵ مهره قرمز به چند طریق می توانیم ۳ مهره را انتخاب کنیم، به طوری که:

(الف) محدودیتی نداشته باشیم.
 (ب) هر ۳ مهره آبی باشند.
 (پ) حداقل ۲ مهره آبی باشند.

پاسخ: در این جا ترتیب انتخاب مهره ها مهم نیست، پس از فرمول ترکیب استفاده می کنیم:

(الف) ۳ مهره را باید از بین ۹ مهره موجود انتخاب کنیم: $(5 + 4 = 9)$

تعداد حالتها $= \binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1} = 84$

می کنیم. البته باید به شرایط و محدودیت های سؤال، حتماً توجه کنیم؛ مثلاً اگر گفته شود عدد زوج بسازید، در جایگاه یکان (اولین خانه سمت راست) باید رقم های زوج قرار دهیم، سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می رویم و پرکردن خانه ها را ادامه می دهیم.

برای فهم بهتر، به مثال های زیر توجه کنید:

مثال: با ارقام ۰, ۱, ۲, ۵, ۶, ۷ و بدون تکرار ارقام: (الف) چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟

(ب) چند عدد ۵ رقمی و فرد می توان ساخت؟
 (پ) چند عدد ۵ رقمی و زوج می توان ساخت؟
 (ت) چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ می توان ساخت؟

پاسخ: (الف) هیچ عددی با صفر شروع نمی شود، پس برای پرکردن اولین خانه سمت چپ، ۵ انتخاب وجود دارد (یکی از ارقام ۱, ۲, ۵, ۶, ۷) در تمامی سؤالاتی که گفته می شود تکرار ارقام غیرمجاز است، پس از پرکردن هر خانه، باید، یکی از ارقام استفاده شده را به دلخواه خط بزنیم:

طبق اصل ضرب \Rightarrow تعداد عددهای مطلوب $= 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 600$

(ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس اولین خانه سمت راست به ۳ حالت پر می شود؛ (یکی از ارقام ۱, ۵, ۷) سپس به سراغ خانه سمت چپ می رویم و پرکردن خانه ها را ادامه می دهیم. (از چپ به راست حرکت می کنیم.)

اصل ضرب \Rightarrow تعداد عددهای مطلوب $= 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 288$

(پ) باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم، یک بار حالتی که یکان صفر باشد و بار دیگر حالتی که یکان صفر نباشد (۲ یا ۶ باشد)، سپس جوابها را با هم جمع می کنیم. (اصل جمع) شاید بپرسید چه موقع این کار را انجام می دهیم؟ فقط وقتی که جزء رقم های داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج یا مضرب ۵ بسازیم این کار را انجام می دهیم. البته تکرار ارقام هم باید غیرمجاز باشد.

حالت اول: $5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \Rightarrow$ تعداد عددها $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

فقط صفر: $1, 2, 5, 6, 7$

حالت دوم: $4 \ 4 \ 3 \ 2 \ 2 \Rightarrow$ تعداد عددها $= 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192$

ارقام ۲ یا ۶: $1, 2, 5, 6, 7$

\Rightarrow تعداد کل عددهای مطلوب $= 120 + 192 = 312$

(ت) باز هم باید ۲ حالت جداگانه در نظر بگیریم. یکی وقتی یکان صفر باشد، یکی وقتی یکان ۵ باشد:

حالت اول: $5 \ 4 \ 3 \ 1 \Rightarrow$ تعداد عددها $= 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

فقط صفر: $1, 2, 5, 6, 7$

ب) ۳ مهره آبی را باید از بین ۴ مهره آبی موجود انتخاب کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 4$$

پ) حداقل ۲ مهره، باید آبی باشند؛ یعنی ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز باید انتخاب شوند یا هر ۳ مهره، آبی انتخاب شوند، لذا:

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می‌باشد.

مثلاً در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A برابر است با:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15$$

نکته: برای یافتن تعداد وترها و تعداد مثلث‌های ساخته شده با تعدادی نقطه که روی محیط یک دایره قرار دارند، باز هم از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم.

مثال: ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. با آن‌ها چند وتر و چند مثلث متمایز می‌توان ساخت؟

پاسخ: هر وتر روی دایره دارای ۲ نقطه ابتدایی و انتهایی است، لذا:

$$\text{تعداد وترها} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2 \times 1} = 45$$

هر مثلث دارای ۳ رأس است؛ بنابراین:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

انتخاب اجباری

اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم به شرطی که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، باید $(r-k)$ شیء را از بین $(n-k)$ شیء باقی‌مانده انتخاب کنیم یعنی تعداد حالت‌های ممکن برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد.

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که همگی آن‌ها شامل g باشند؟

پاسخ: می‌خواهیم g در تمام زیرمجموعه‌ها باشد، پس یک انتخاب اجباری داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 15$$

درس ۲: احتمال

پدیده‌های قطعی و تصادفی

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از این‌که کدام نتیجه، قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، یک برآمد می‌گوییم. ضمناً به مجموعه شامل تمام نتایج ممکن، فضای نمونه آزمایش می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم. تعداد عضوهای S را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً لازم نیست تمام اعضای S را بنویسیم، چون عملی وقت‌گیر است. فقط کافی است $n(S)$ را به دست آوریم.

مثال: قطعی یا تصادفی بودن پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وجود دانش‌آموزی که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد در کلاس دوازدهم یک مدرسه روزانه

ب) پرتاب سکه در مسابقه فوتبال توسط داور برای تعیین مالکیت توپ

پ) خارج شدن ۱ مهره سفید از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید (با چشم بسته یک مهره را انتخاب کرده‌ایم).

ت) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش «رو» و تاسش زوج بیاید، برنده است. تعیین برنده، قبل از بازی، پدیده‌ای قطعی است یا تصادفی؟

پاسخ: الف) پدیده قطعی است، چون تمام دانش‌آموزان کلاس دوازدهم این مدرسه بالای ۱۰ سال سن دارند.

ب) پدیده تصادفی است؛ چون نمی‌دانیم سکه «رو» می‌آید یا «پشت».

پ) پدیده قطعی است؛ چون رنگ مهره انتخابی حتماً سفید است و از قبل قابل پیش‌بینی است.

ت) پدیده تصادفی است؛ چون نمی‌توانیم بگوییم حتماً سکه «رو» و تاس «زوج» می‌آید.

مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، تعداد اعضای فضای نمونه را به دست آورید. (در قسمت‌های الف، ب و پ اعضای S را نیز بنویسید.)

الف) پرتاب یک تاس

ب) پرتاب یک تاس و یک سکه

ت) پرتاب ۳ تاس

ث) انتخاب ۳ نفر از بین ۵ معلم و ۲ دانشجو

الف) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

ب) $S = \{r, p\} \Rightarrow n(S) = 2$

پ) $S = \{(r, 1), (r, 2), \dots, (r, 6), (p, 1), (p, 2), \dots, (p, 6)\} \Rightarrow n(S) = 2 \times 6 = 12$

ت) $n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$

ث) $n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$

پیشامد تصادفی: به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه S یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. پیشامدها را معمولاً با حروف A, B, C نمایش می‌دهیم و تعداد اعضای آن‌ها را با $n(A), n(B), n(C)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر و تعداد اعضایشان را مشخص کنید:

الف) عدد ظاهر شده، اول باشد. (پیشامد A)

ب) عدد ظاهر شده، حداقل ۴ باشد. (پیشامد B)

پ) عدد ظاهر شده، حداکثر ۴ باشد. (پیشامد C)

الف) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ب) $A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(A) = 3$

پ) $B = \{4, 5, 6\} \Rightarrow n(B) = 3$

پ) $C = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(C) = 4$

اعمال روی پیشامدها: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، آن‌گاه اجتماع و اشتراک A و B ، تفاضل A از B و متمم مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شوند: (قسمت‌های رنگی)

